

Методические рекомендации «Математическая грамотность»

Методологической основой для разработки заданий, предназначенных для формирования и оценки функциональной грамотности, была выбрана концепция международного исследования PISA (Programme for International Student Assessment), целью которого является оценка подготовки 15-летних обучающихся по шести направлениям, одним из которых является математика.

Оценка математической подготовки 15-летних обучающихся в исследовании PISA основана на следующем определении математической грамотности: «Математическая грамотность – это способность индивидуума проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разнообразных контекстах реального мира».

Для выявления уровней сформированности математической грамотности у обучающихся 8-го класса участникам самодиагностики предлагаются контекстные, практические проблемные ситуации, разрешаемые средствами математики. Контекст, в рамках которого предложена проблема, должен быть жизненным, а не надуманным. Поставленная проблема должна быть интересной и актуальной для обучающихся того возраста, на который она рассчитана. Для выполнения задания требуется холистическое, а не фрагментарное, применение математики. Это означает, что требуется осуществить весь процесс работы над проблемой: от понимания, включая формулирование проблемы на языке математики, через поиск и осуществление ее решения, до сообщения и оценки результата, а не только часть этого процесса (например, решить уравнение или упростить алгебраическое выражение).

Для выполнения заданий требуются знания и умения из разных разделов курса математики основной школы, соответствующие темам, выделенным в исследовании PISA, и планируемым результатам в объёме ФГОС ООО и Примерной основной образовательной программы, формирование которых осуществляется в 5–9-х классах.

В работах используется следующая структура задания: дается описание ситуации (введение в проблему), к которой предлагаются два–три связанных с ней вопроса. Информация дается в различных формах: числовой, символической, текстовой, графической (график, диаграмма, схема, изображение и др.), структурированной (таблица). Графические средства визуализации математического содержания проблемы окажут обучающимся помощь в части мысленной визуализации и погружения в сюжет, на этапе её моделирования, послужат опорой для проведения рассуждений. Вопрос к заданию должен раскрывать приведенную ситуацию с определённой стороны.

Для ответа на вопрос достаточно информации, представленной в описании ситуации. Если для ответа на последующие вопросы требуется дополнительная информация, то она указывается в формулировке вопроса или отдельно. Например, если для выполнения задания требуется использовать формулы, то они приводятся в качестве справочного материала. Каждый самостоятельный содержательный шаг фиксируется, все основные элементы ответа выделяются для оценивания. Для выполнения большинства заданий не требуется выполнять громоздкие вычисления, что позволяет значительно уменьшить влияние вычислительных ошибок на демонстрацию обучающимся понимания изученных понятий, применение способов действий для решения поставленных задач. Однако реальные расчеты могут содержать числа и величины, выполнение действий с которыми довольно затратно по времени и прилагаемым интеллектуальным усилиям.

В целях оптимизации вычислений обучающимся разрешается использовать калькулятор. В большинстве заданий не содержится прямых указаний на способ, правило или алгоритм выполнения (решения), что позволяет проверить, насколько осознанно обучающиеся применяют полученные знания.

Стартовая работа состоит из 4-х комплексных заданий, в каждом из которых по 2 вопроса. Все задания проверяют основные умения по математической грамотности.

Используется следующая структура комплексного задания: даётся описание ситуации (введение в проблему), к которой предлагаются от двух до пяти связанных с ней вопросов/заданий.

Введение в проблему представляет собой небольшой вводный текст мотивирующего характера, который не содержит отвлекающей информации, не связанной с заданием или не принципиальной для ответа на поставленные далее вопросы. Важно: читательская грамотность не должна отражаться на проверке математической грамотности.

Информация, сообщаемая в задании, даётся в различных формах: знаковой (число, формула), текстовой, графической (график, диаграмма, схема, изображение и др.), она может быть структурирована и представлена в виде таблицы.

Наличие визуализации желательно. Оказать помощь обучающимся в части мысленной визуализации и погружения в сюжет должны фото и рисунки. Графические средства визуализации математического содержания проблемы помогут обучающимся на этапе её моделирования, послужат опорой для проведения рассуждений.

Если введение содержит слова, которые могут быть неизвестны обучающимся, то в нём можно дать краткое пояснение, определение и/или иллюстрацию к ним в виде отдельного фрагмента «Справочная информация».

Каждое задание позволяет раскрыть приведённую ситуацию с определённой стороны.

Задания не содержат прямых указаний на способ, правило или алгоритм выполнения (решения), что позволяет проверить, насколько осознанно обучающиеся применяют полученные знания.

Учитывается, что задания предлагаются обучающимся на компьютере, и ответы они вносят, используя его клавиатуру. При разработке заданий используются возможности компьютера, позволяющие проводить построение заданных математических объектов, переносить на плоскости заданные объекты, выполнять вычисления с помощью встроеного программного калькулятора и др.

Используются задания разного типа по форме ответа:

- с выбором одного или нескольких верных ответов из предложенных альтернатив;
- со свободным кратким ответом в форме конкретного числа, одного–двух слов;
- со свободным полным (развернутым) ответом, содержащим запись решения поставленной проблемы, построение заданного геометрического объекта, объяснение полученного ответа.

Выполнение заданий с выбором ответа и свободным кратким ответом оценивается автоматически, задания с развернутым ответом оцениваются учителями.

Результаты выполнения заданий обучающимися могут оцениваться одним баллом (как правило, это задания низкого уровня сложности) или двумя баллами (задания среднего и высокого уровней сложности). В последнем случае за полный ответ выставляются 2 балла, за частично верный ответ – 1 балл, за неверный ответ – 0 баллов.

Общая структура характеристик заданий для формирования и оценки математической грамотности включает.

1. *Область содержания* (всего 4 области): «Пространство и форма», «Изменение и зависимости», «Неопределенность и данные», «Количество».
2. *Контекст* (всего 4 контекста): общественный, личный, профессиональный, научный.
3. *Вид когнитивной деятельности* (всего 4 вида деятельности): рассуждать, формулировать ситуацию на языке математики, применять математический аппарат, интерпретировать/оценивать полученные результаты.

4. *Объект оценки* (предметный результат обучения): например, умение читать графики реальных зависимостей.
5. *Уровень сложности*: низкий, средний или высокий.
6. *Формат ответа*: с развернутым ответом, с выбором одного ответа, с множественным выбором, с кратким ответом, выделение в тексте, перетаскивание.
7. *Система оценивания* (1 или 2 балла): максимальный балл и критерии оценки.

Так как в исследовании PISA-2022 выделены четыре темы для особого акцента в оценке необходимо более подробно рассмотреть каждую тему, соответствующую области содержания математики (указана в скобках).

Явления роста (области содержания «Изменения и зависимости»): различные типы линейного и нелинейного роста.

Ожидания: а) понимание обучающимися, что не всякий рост является линейным; б) осознание, что нелинейный рост имеет особые и глубокие последствия; в) интуитивная оценка экспоненциального роста как чрезвычайно быстрого темпа роста.

Исследователи подчеркивают, что у обучающихся, если они имеют дело с набором линейных зависимостей, как, например, зависимость пройденного расстояния от времени при движении с постоянной скоростью, может сложиться стойкое и опасное заблуждение, что все зависимости носят линейный характер. Однако относительно довольно многих явлений, например, распространения вирусов и бактерий, изменения климата, требуется осознание, что такие явления нуждаются в нелинейных моделях. Ярким и актуальным примером для понимания нелинейного (экспоненциального) роста и того, насколько быстро могут распространяться вирусы, учитывая, что скорость изменений увеличивается, может служить пандемия коронавируса, графики его распространения по различным государствам. Только понимание экспоненциального характера распространения заболевания помогло медицинскому персоналу в разных странах мира понять угрозу и необходимость быстрых действий, тем самым удержать ситуацию распространения под контролем.

Подчеркивается, что речь не идет о том, что предполагаемые вопросы не требуют знания экспоненциальной функции. От них требуется лишь оправдать предполагаемые ожидания раздела содержания «Изменения и зависимости», перечисленные выше. Например, увеличение магнитуды землетрясения на 1 балл соответствует увеличению амплитуды колебаний в 10 раз.

Геометрические приближения (область содержания «Пространство и формы»): приближение параметров и свойств нерегулярных или незнакомых форм и объектов путем их разбиения на такие, для которых существуют известные формулы и инструменты. Ожидается использование обучающимися своего понимания традиционных явлений пространства и формы в ряде типичных ситуаций.

Анализируя окружающие нас геометрические формы, исследователи приходят к выводу, что мир полон форм, которые не соответствуют типичным образцам равенства или симметрии, они в большей степени нерегулярны. Поэтому не так легко распознать и понять, что мы видим, и найти площадь или объем выделяемых нами объектов и конфигураций. Именно поэтому фокусной точкой области содержания «Пространство и формы» становятся геометрические приближения и использование обучающимися собственных представлений о пространстве и геометрических формах в типичных ситуациях. Например, вычисление необходимого количества коврового покрытия для помещения с острыми углами, изгибами, эркерами и прочими нерегулярностями, что требует другого подхода, чем в случае с типичной прямоугольной комнатой.

Компьютерное моделирование (область содержания «Количества»): изучение ситуаций с точки зрения переменных и их влияния на результат (могут включать в себя составление бюджета, планирование, распределение населения, экспериментальную вероятность и т.д.). Ожидается, что доступность обучающимся для анализа массивов

реальных данных позволит им изучить широкую категорию сложных проблем, включая процентный рост.

Определение компьютерного моделирования в качестве фокусной точки области математического содержания по области «Количества» важно, так как в современном мире все чаще многие проблемы решаются с помощью компьютерного моделирования на основе алгоритмов. Например, существуют проблемы, которые не так легко решить из-за того, что требуемая для этого математика сложна или включает большое количество факторов, действующих в одной системе, или из-за этических проблем, связанных, например, с воздействием на живые существа. В примере «Моделирование сбережений», приводимом исследователями на интерактивной платформе официального сайта ОЭСР, обучающийся использует компьютерное моделирование в качестве инструмента для принятия решений относительно банковского вклада.

Условное принятие решения (область содержания «Неопределенность и данные»): использование основных принципов комбинаторики и понимания взаимосвязей между переменными для интерпретации ситуаций и прогнозирования. Ожидание: обучающиеся должны оценить, как формулировка модели влияет на выводы, которые могут быть сделаны, и понять, что различные предположения / отношения вполне могут привести к различным выводам.

Известно, что статистика предоставляет меру изменчивости, характерную для большей части того, что люди встречают в своей повседневной жизни. Эта мера – дисперсия. При наличии более чем одной переменной существует вариация в каждой из переменных, а также ковариация, характеризующая отношения между переменными. Эти взаимосвязи часто могут быть представлены в двусторонних таблицах, которые обеспечивают основу для умозаключений.

В двухсторонней таблице для двух дихотомических переменных (то есть двух переменных, которые могут принимать только два значения), есть четыре комбинации. Например, в двусторонней таблице представлены три типа отношений, которые, в свою очередь, дают оценки соответствующих вероятностей. К ним относятся вероятности четырех совместных событий, двух предельных и условных вероятностей, которые играют центральную роль в том, что исследователями названо условным принятием решений. Ожидается, что тестовые задания PISA позволят обучающимся прочитать соответствующие данные из таблицы с глубоким пониманием значения данных, которые они извлекают.

В качестве примера задания представлена ситуация покупки в интернет-магазине, где дана сводка оценок покупателей для продукта. Кроме того, дается и более подробный анализ отзывов клиентов, предоставивших два вида оценок. От ученика требуется понимание различных вероятностных оценок, которые обеспечивает таблица с двумя входами.

Принятие темы «Условное принятие решений» в качестве фокуса области содержания «Неопределенность и данные» сигнализирует о том, что обучающиеся должны уметь оценивать, как анализ ситуации влияет на выводы, которые могут быть сделаны, и понимать, что различные предположения вполне могут привести к различным выводам.

Обобщая изложенное выше, можно сформулировать следующие возможности, которые должны обеспечиваться заданиями для компьютерной оценки математической грамотности, с точки зрения их выполнения обучающимися:

- работа с текстом комплексного задания, смысловое чтение текста, выполнение действий с его отдельными фрагментами и структурными элементами как на этапе изучения ситуации, так и на этапе представления результата выполнения задания, формулирования ответа и решения (различные способы представления и структурирования информации, работы с утверждениями);

- моделирование объектов и их свойств, приближения одних объектов другими,

манипулирование с отдельными элементами моделей (числовых и буквенных выражений, геометрических фигур, графиков, диаграмм и др.);

-когнитивная деятельность, направленная на распознавание математических аспектов реальных ситуаций, размышления над моделированием ситуации на языке математики, решением и интерпретацией полученных результатов, формулирование математической задачи, гипотез и выводов, проведение логических рассуждений.

В дополнение к комплексным заданиям, разработанным для формирования и оценки функциональной грамотности в учебном процессе, на платформе Российской электронной школы (РЭШ) представлены диагностические работы, назначением которых является оценка уровня сформированности функциональной грамотности для отдельных направлений. В разделе, посвященном математической грамотности, предлагаются по две диагностические работы на каждый класс. С их помощью можно определить уровни математической грамотности обучающихся, класса и школы. С учетом полученных результатов можно выстраивать траектории обучения и повышения функциональной грамотности учеников. Диагностические работы рассчитаны на 40 минут (один урок).

При разработке диагностических и итоговых заданий по математической грамотности применяется трехмерная модель оценки, используемая в исследовании PISA. Тремя её составляющими являются: а) *содержательная область оценки*; б) *компетентностная область оценки*; в) *контексты (жизненные ситуации)*.

Содержание заданий представлено в предметных областях, зафиксированных в системе (рамке) математической компетентности для обучающихся школьного возраста, разработанной в России. В числе этих предметных областей: количество, пространство и форма, изменение и зависимости, неопределенность и данные.

Процессы описывают четыре вида познавательной деятельности и умственных стратегий и подходов, которые актуализируют знание и понимание в области математики: формулировать, применять, интерпретировать/оценивать, рассуждать.

Принятое определение математической грамотности повлекло за собой разработку особого инструментария исследования: обучающимся предлагаются не типичные учебные задачи, характерные для традиционных систем обучения и мониторинговых исследований математической подготовки, а *близкие к реальным проблемные ситуации*, представленные в некотором контексте и разрешаемые доступными школьникам средствами математики.

К каждой ситуации предлагаются связанные с ней вопросы, которые требуют осуществить все процессы работы над проблемой: от выявления математической информации через ее анализ и оценку математических проблем к применению.

Материалы, предлагаемые для обучающихся разного возраста, различаются по охваченным темам и контекстам, степени сложности предлагаемых заданий, форматам представленности в заданиях процессов познавательной деятельности.

Задания предлагаются обучающимся на компьютере, и ответы они вносят, используя клавиатуру компьютера.

В работе предлагаются задания разного типа по форме ответа:

- с выбором одного или нескольких верных ответов из предложенных альтернатив;
- со свободным кратким ответом в форме конкретного числа, одного–двух слов;
- со свободным полным ответом, содержащим запись решения поставленной проблемы, построение заданного геометрического объекта, объяснение полученного ответа.

Для успешной подготовки обучающихся к проведению итоговой работы рекомендуются следующие ресурсы:

1. Открытые электронные ресурсы по формированию и оценке функциональной грамотности обучающихся на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения «Федеральный институт оценки качества образования», который активно сопровождает проведение международных исследований, в том числе

PISA. Именно на данном сайте появился один из первых банков открытых заданий по тем видам функциональной грамотности, которые являются важными и максимально приближены к заданиям исследования PISA. С этими заданиями можно работать и обрабатывать их в компьютерном варианте.

fioo.ru/примеры-задач-pisa.

2. Разработки Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» размещены на ресурсе единого содержания образования ЕДСОО. Эти материалы представлены в большом объеме, но требуют распечатки, работы с бумажными носителями и ручной обработки.
https://edsoo.ru/Funkcionalnaya_gramotnost.htm.

3. Банк заданий для формирования и оценки функциональной грамотности обучающихся основной школы (5–9 классы) содержит не только сами задания, спецификацию, систему оценивания, но и методические рекомендации по каждому виду функциональной грамотности. Материалы приближены к международным исследованиям, представлены в формате для распечатки, нет возможности компьютерной обработки.

<http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy>

4. Ресурс Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений». Особенностью ресурса является ограниченность выбора по видам грамотности, представлен банк заданий по читательской грамотности и естественнонаучной грамотности, но так или иначе у них серьезный банк по проведению оценочных процедур ОГЭ, ЕГЭ, поэтому этот ресурс позволяет использовать материалы для включения в учебный процесс и внеучебную деятельность по формированию функциональной грамотности обучающихся.
<https://fipi.ru/otkrytyy-bank-zadaniy-dlya-otsenki-yestestvennonauchnoy-gramotnosti>

5. Электронный банк заданий для оценки функциональной грамотности на портале «Российская электронная школа» создан для проведения мероприятий, нацеленных на подготовку обучающихся к тестированию для выявления уровня их функциональной грамотности, то есть способности применять полученные знания и умения для решения различных проблем. Возможности ресурса включают в себя ознакомление с электронным банком тренировочных заданий, прохождение тестирования обучающимися в режиме реального времени, проверку развернутых ответов.

<https://fg.reshe.edu.ru/>

6. Демонстрационные варианты диагностических работ по функциональной грамотности Государственного автономного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования города Москвы «Московский центр качества образования».

<https://demo.mcko.ru/test/>

Член рабочей группы по функциональной грамотности

Левченко А.А., методист кафедры естественно-математических дисциплин и информационных технологий ГБУ ДПО РО РИПК и ППРО, кандидат педагогических наук